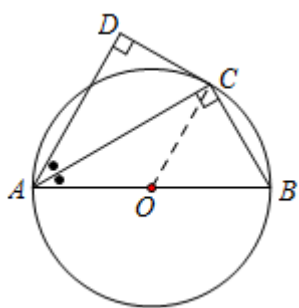


相似三角形进阶二

一、相似与圆综合

1. AA普通相似

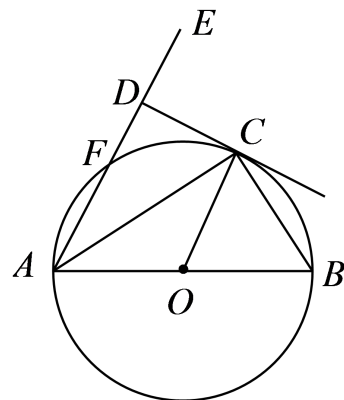
AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 平分 $\angle BAD$ ， $CD \perp AD$ 于 D 。



$$\triangle ACB \sim \triangle ADC, AC^2 = AB \cdot AD.$$

例题

1. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， AE 交 $\odot O$ 于点 F ，且与 $\odot O$ 的切线 CD 互相垂直，垂足为 D 。



- (1) 求证： $\angle EAC = \angle CAB$;
 (2) 若 $CD = 4$ ， $AD = 8$ ，求 $\odot O$ 的半径。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 半径为5。

【解析】 (1) 连接 OC ，

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore CD \perp OC$,

又 $\because CD \perp OE$,

$\therefore OC \parallel AE$,

$\therefore \angle EAC = \angle ACO$,

$\because OC = OA$,

$\therefore \angle ACO = \angle CAB$,

$\therefore \angle EAC = \angle CAB$.

(2) 连接 BC ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $CD \perp AE$ 于点 D ,

$\therefore \angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$,

$\because \angle EAC = \angle CAB$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

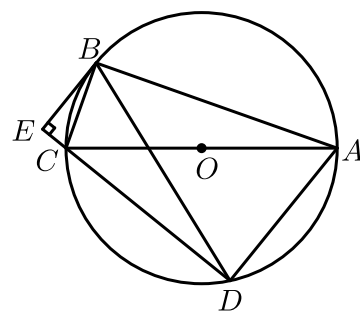
$$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 = 4^2 + 8^2 = 80,$$

$$\therefore AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{80}{8} = 10,$$

$\therefore$ 半径为 5.

【标注】【知识点】圆与等腰+平行线

2. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle ABC = 90^\circ$, $\odot O$ 的切线 BE 交 DC 的延长线于点 E , $BE \perp CE$.



(1) 求证: $BD = BA$.

(2) 若 $BC = 3$, $\odot O$ 的半径为 $\frac{9}{2}$, 求线段 CD 的长度.

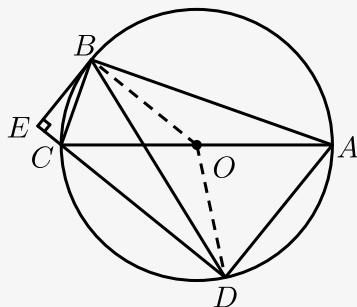
【答案】(1) 证明见解析.

(2) $CD = 7$.

【解析】(1) 连接 OB ,

$\because BE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OB \perp BE$,
 $\therefore BE \perp CE$,
 $\therefore OB \parallel ED$,
 $\therefore \angle BCE = \angle OBC$,
 $\therefore OB = OC$,
 $\therefore \angle OCB = \angle OBC$,
 $\therefore \angle BCE = \angle OCB$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形 ,
 $\therefore \angle BCE = \angle DAB$,
 $\therefore \angle BCO = \angle ADB$,
 $\therefore \angle ADB = \angle DAB$,
 $\therefore BD = BA$.



(2) $\therefore \angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的直径 , $AC = 2AO = 9$,
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\therefore BC = 3$,
 $\therefore AB = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$,
 $\therefore BD = AB = 6\sqrt{2}$,
 $\therefore \angle E = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCE = \angle ACB$,
 $\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB$,
 $\therefore \frac{3}{9} = \frac{CE}{3}$,
 $\therefore CE = 1$,
 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中 , $BE = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$,
 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中 , $ED = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$,
 $\therefore CD = ED - EC = 8 - 1 = 7$.

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

【重点强调】

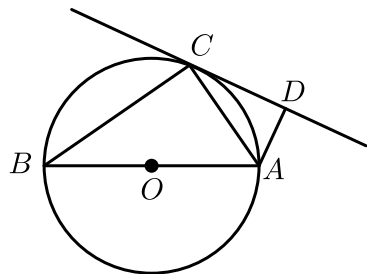
- (1) 由题目中“ $\angle ABC = 90^\circ$ ”,可以得到 AC 是圆的直径 , $\angle BAC$ 、 $\angle BCA$ 互余 , $\angle ADC = 90^\circ$.
 (2) 由题目中“ BE 是 $\odot O$ 的切线”,所以必须连接 OB , 得到 $\angle OBE = 90^\circ$. 又可以推出 $\angle EBC = \angle OBA = \angle OAB = \angle BDC$.
 (3) 由 $\angle EBC = \angle OAC$, 以前边的知识 , 可以得到 , $\triangle BEC \sim \triangle ABC$.
 (4) 问题中提到求证“ $BD = BA$ ”, 我们能想到**证明线段相等的方法有**: 证两条线段所在的三角形为等腰三角形、证两条线段组成的三角形是全等三角形、用勾股定理或相似或三角函数求出两条线段的长

度在比较是不是相等.

(5) 第二问求“线段 CD ”的长度, **求线段长度的方法有**: 通过勾股定理求线段长度、通过垂径定理及勾股定理求线段长度、通过三角函数求线段长度.

练习

3. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上一点, $\angle ACD = \angle B$, $AD \perp CD$.



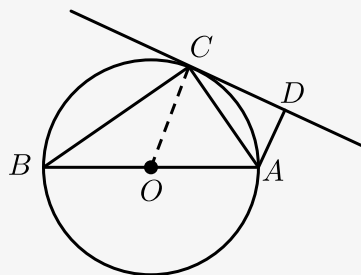
(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 $AD = 1$, $OA = 2$, 求 AC 的值.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $AC = 2$

【解析】 (1) 连接 OC , 如图所示:



$\because AB$ 是 $\odot O$ 直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\because OB = OC$,

$\therefore \angle B = \angle BCO$,

又 $\because \angle ACD = \angle B$,

$\therefore \angle OCD = \angle OCA + \angle ACD = \angle OCA + \angle BCO = \angle ACB = 90^\circ$,

即 $OC \perp CD$,

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) $\because AD \perp CD$,

$\therefore \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$,

又 $\because \angle ACD = \angle B$,

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ACB \sim \triangle ADC, \\ \therefore AC^2 = AD \cdot AB = 1 \times 4 = 4, \\ \therefore AC = 2.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】切线的判定定理

【重点强调】

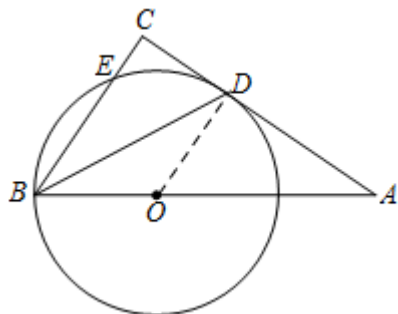
2018~2019学年天津和平区初三上学期期末第21题10分

2. 共角、等角型 (A字、8字型)

💡 平行出相似

🌿 角平分线+等腰出平行

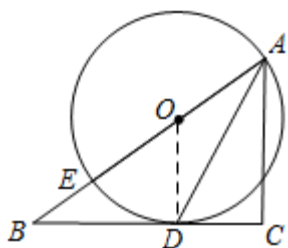
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 点 O 在 AB 上, $\odot O$ 经过 B, D 两点, 交 BC 于点 E .



$$OD \parallel BC, \triangle ABC \sim \triangle AOD.$$

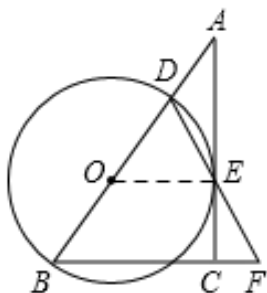
🌿 切线性质证平行

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 E 在 AB 上, 以 AE 为直径的 $\odot O$ 切 BC 于点 D , 连接 AD .



$$OD \parallel AC, \triangle ABC \sim \triangle OBD.$$

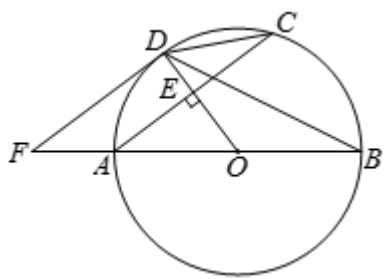
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是边 AB 上一点，以 BD 为直径的 $\odot O$ 与边 AC 相切于点 E ，连结 DE 并延长交 BC 的延长线于点 F 。



$$OE \parallel BF, \quad \triangle AOE \sim \triangle ABC, \\ \triangle DOE \sim \triangle DBF.$$

倒角证平行

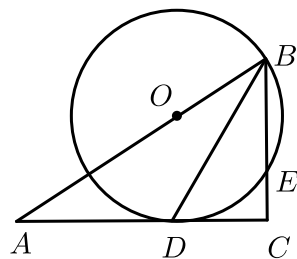
AB 是 $\odot O$ 的直径，半径 OD 垂直弦 AC 于点 E ， F 是 BA 延长线上一点， $\angle CDB = \angle BFD$ 。



$$AC \parallel DF, \quad \triangle AOE \sim \triangle FOD.$$

例题

4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， BD 是角平分线，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心， OB 为半径的圆经过点 D ，交 BC 于点 E 。



- (1) 求证： AC 是 $\odot O$ 的切线。
(2) 若 $OB = 10$ ， $CD = 8$ ，求 BE 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $BE = 12$ 。

【解析】 (1) 连接 OD 。

$\therefore BD$ 为 $\angle ABC$

平分线,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore OB = OD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

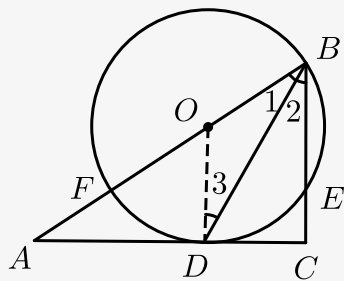
$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore OD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODA = 90^\circ,$$

则 AC 为圆 O 的切线.

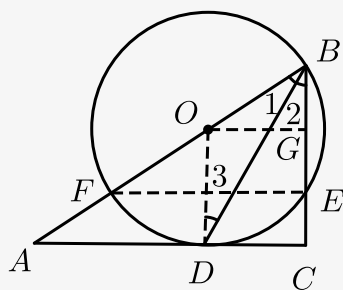


(2) 设 OA 交 $\odot O$ 于点 F , 过 O 作 $OG \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 $ODCG$

为矩形,

$\therefore$



$$GC = OD = OB = 10, OG = CD = 8.$$

在 $\text{Rt}\triangle OBG$ 中, 利用勾股定理得: $BG = 6$,

$$\therefore BC = BG + GC = 6 + 10 = 16.$$

$$\therefore OD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{OA}{AB} = \frac{OD}{BC}, \text{ 即 } \frac{OA}{OA + 10} = \frac{10}{16},$$

$$\text{解得: } OA = \frac{50}{3},$$

$$\therefore AB = \frac{50}{3} + 10 = \frac{80}{3}.$$

连接 EF ,

$\therefore BF$ 为圆的直径,

$$\therefore \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BF}{AB}, \text{ 即 } \frac{BE}{16} = \frac{20}{\frac{80}{3}},$$

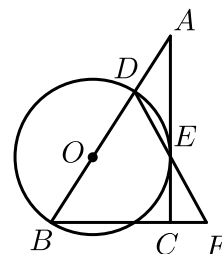
$$\text{解得: } BE = 12.$$

【标注】【知识点】圆与相似

【重点强调】

2016~2017学年天津滨海新区初三上学期期末第22题10分

5. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 边上的一点, 以 BD 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于点 E , 连结 DE 并延长, 与 BC 的延长线交于点 F . 且 $BD = BF$.

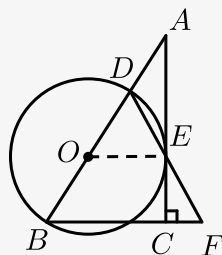


- (1) 求证: AC 与 $\odot O$ 相切.
 (2) 若 $BC = 6$, $AB = 12$, 求 $\odot O$ 的面积.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\odot O$ 的面积 16π .

【解析】 (1) 连接 OE ,



$\because OD = OE$,
 $\therefore \angle ODE = \angle OED$,
 $\because BD = BF$,
 $\therefore \angle ODE = \angle F$,
 $\therefore \angle OED = \angle F$,
 $\therefore OE \parallel BF$,
 $\therefore \angle AEO = \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore AC$ 与 $\odot O$ 相切.

(2) 由(1)知 $\angle AEO = \angle ACB$, 又 $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{OE}{BC} = \frac{AO}{AB},$$

设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $\frac{r}{6} = \frac{12-r}{12}$,

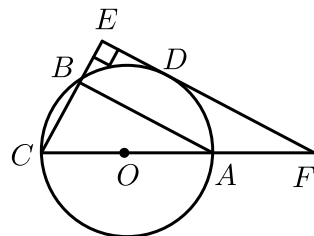
解得： $r = 4$ ，

$\therefore \odot O$ 的面积 $\pi \times 4^2 = 16\pi$ 。

【标注】【知识点】圆与相似

练习

6. 如图，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AC 是 $\odot O$ 的直径， D 是 $\widehat{AB}$ 的中点，过点 D 作直线 BC 的垂线，分别交 CB 、 CA 的延长线于点 E 、 F 。

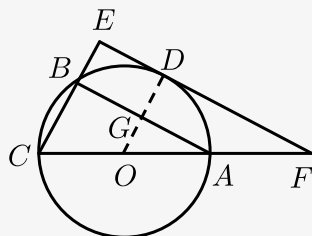


- (1) 求证： EF 是 $\odot O$ 的切线。
 (2) 若 $EF = 8$ ， $EC = 6$ ，求 $\odot O$ 的半径。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\frac{15}{4}$ 。

【解析】(1) 连接 OD 交于 AB 于点 G 。



$\because D$ 是 $\widehat{AB}$ 的中点， OD 为半径，

$\therefore AG = BG$ 。

$\because AO = OC$ ，

$\therefore OG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线。

$\therefore OG \parallel BC$ ，

即 $OD \parallel CE$ 。

又 $\because CE \perp EF$ ，

$\therefore OD \perp EF$ ，

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中， $CE = 6$ ， $EF = 8$ ，

$$\therefore CF = 10.$$

设半径 $OC = OD = r$ ，则 $OF = 10 - r$ ，

$$\therefore OD \parallel CE,$$

$$\therefore \triangle FOD \sim \triangle FCE,$$

$$\therefore \frac{FO}{FC} = \frac{OD}{CE},$$

$$\therefore \frac{10-r}{10} = \frac{r}{6},$$

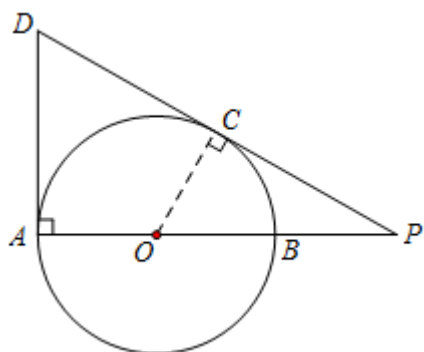
$$\therefore r = \frac{15}{4},$$

即： $\odot O$ 的半径为 $\frac{15}{4}$ 。

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

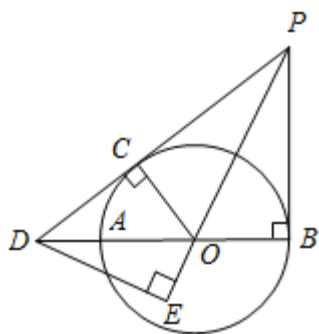
斜A、斜8字型

AB 是 $\odot O$ 的直径， DA 、 DC 是 $\odot O$ 的两条切线， DC 延长线交 AB 延长线于点 P 。



$$\triangle PCO \sim \triangle PAD.$$

AB 为 $\odot O$ 的直径， PB 、 PC 是 $\odot O$ 的切线，延长 PC 与 BA 的延长线交于点 D ， $DE \perp PO$ 交 PO 延长线于点 E 。

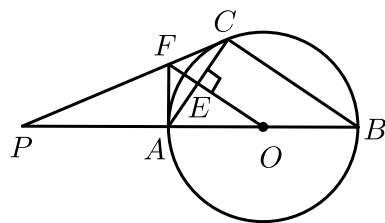


$$\triangle PBO \cong \triangle PCO, \triangle DCO \sim \triangle DBP,$$

$$\triangle DEO \sim \triangle PBO.$$

例题

7. 如图, C 是以 AB 为直径的 $\odot O$ 上一点, 过 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E , 过点 A 作 $\odot O$ 的切线交 OE 的延长线于点 F , 连接 CF 并延长交 BA 的延长线于点 P .

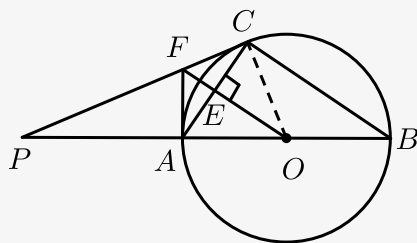


- (1) 求证: PC 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 若 $AF = 1$, $OA = 2\sqrt{2}$, 求 PC 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $PC = \frac{16}{7}$.

【解析】 (1) 连接 OC ,



$\because OE \perp AC$,
 $\therefore AE = CE, FA = FC$,
 $\therefore \angle FAC = \angle FCA$,
 $\because OA = OC$ (圆的半径相等),
 $\therefore \angle OAC = \angle OCA$,
 $\therefore \angle OAC + \angle FAC = \angle OCA + \angle FCA$, 即 $\angle FAO = \angle FCO$,
 $\because FA$ 与 $\odot O$ 相切, 且 AB 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore FA \perp AB$,
 $\therefore \angle FCO = \angle FAO = 90^\circ$,
 $\because CO$ 是半径,
 $\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) $\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线,
 $\therefore \angle PCO = 90^\circ$,
 又 $\because \angle FPA = \angle OPC, \angle PAF = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle PAF \sim \triangle PCO$,
 $\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{AF}{CO}$,

$$\therefore CO = OA = 2\sqrt{2}, AF = 1,$$

$$\therefore PC = 2\sqrt{2}PA,$$

$$\text{设 } PA = x, \text{ 则 } PC = 2\sqrt{2}x.$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCO \text{ 中, 由勾股定理得: } (2\sqrt{2}x)^2 + (2\sqrt{2})^2 = (x + 2\sqrt{2})^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{4\sqrt{2}}{7},$$

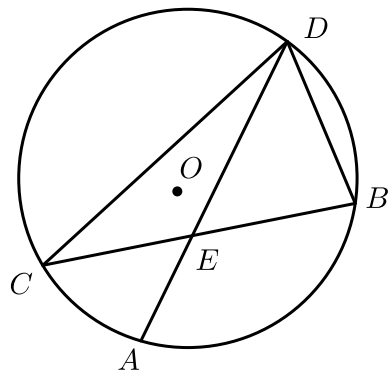
$$\therefore PC = 2\sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{7} = \frac{16}{7}.$$

【标注】【知识点】圆与勾股

【重点强调】

2016~2017学年12月天津和平区初三上学期月考第23题10分

8. 如图, A 、 B 、 C 、 D 四点在 $\odot O$ 上, $AE = 3$, $BE = 4$, $DE = 5$.



(1) 求证: $\triangle ACE \sim \triangle BDE$.

(2) 求 CE 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) CE = \frac{15}{4}.$$

【解析】 (1) $\because BC$ 、 AD 交于 E ,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\because \widehat{CD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4.$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE.$$

(2) $\because \triangle ACE \sim \triangle BDE$,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}.$$

$$\because AE = 3, BE = 4, DE = 5,$$

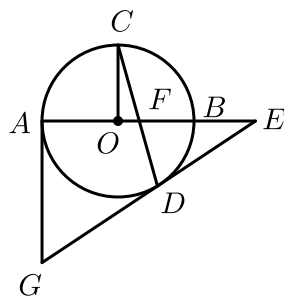
$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{CE}{5},$$

$$\therefore CE = \frac{15}{4}.$$

【标注】【知识点】圆与相似

练习

9. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, C 是 $\odot O$ 上一点, $CO \perp AB$ 于点 O , 弦 CD 与 AB 交于点 F , 过点 D 作 $\angle CDE$, 使 $\angle CDE = \angle DFE$, 交 AB 的延长线于点 E . 过点 A 作 $\odot O$ 的切线交 ED 的延长线于点 G .



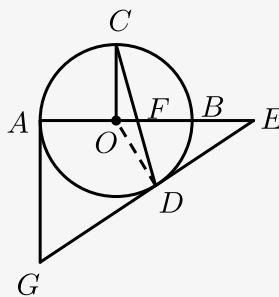
- (1) 求证: GE 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 若 $OF:OB = 1:3$, $\odot O$ 的半径为3, 求 AG 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $AG = 6$.

【解析】(1) 连接 OD ,

$\because OC = OD$,
 $\therefore \angle C = \angle ODC$.
 $\because OC \perp AB$,
 $\therefore \angle COF = 90^\circ$.
 $\therefore \angle OCD + \angle CFO = 90^\circ$.
 $\therefore \angle ODC + \angle CFO = 90^\circ$.
 $\because \angle EFD = \angle FDE$,
 $\angle EFD = \angle CDE$,
 $\therefore \angle CDO + \angle CDE = 90^\circ$.
 $\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的切线.



(2) $\because OF:OB = 1:3$, $\odot O$ 的半径为3,

$\therefore OF = 1$,

$\because \angle EFD = \angle EDF$,

$\therefore EF = ED$,

在 $Rt\triangle ODE$ 中, $OD = 3$, $DE = x$, 则 $EF = x$, $OE = 1 + x$,

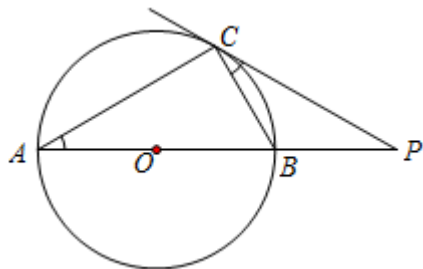
$$\begin{aligned}
 &\because OD^2 + DE^2 = OE^2, \\
 &\therefore 3^2 + x^2 = (x+1)^2, \text{ 解得 } x = 4. \\
 &\therefore DE = 4, OE = 5, \\
 &\because AG \text{ 为 } \odot O \text{ 的切线}, \\
 &\therefore AG \perp AE, \\
 &\therefore \angle GAE = 90^\circ, \\
 &\text{而 } \angle OED = \angle GEA, \\
 &\therefore \text{Rt}\triangle EOD \sim \text{Rt}\triangle EGA, \\
 &\therefore \frac{OD}{AG} = \frac{DE}{AE}, \text{ 即 } \frac{3}{AG} = \frac{4}{3+5}, \\
 &\therefore AG = 6.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与相似

3. 共角共边、等角等边型（子母型）

 弦切角引出子母相似

AB 是 $\odot O$ 的直径， PC 是 $\odot O$ 的切线， $\angle A = \angle PCB$.

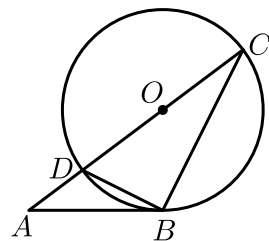


$$\triangle PCB \sim \triangle PAC, \quad PC^2 = PB \cdot PA$$

_____ .

例题

10. 如图， DC 是 $\odot O$ 的直径，点 B 在圆上，直线 AB 交 CD 延长线于点 A ，且 $\angle ABD = \angle C$.



- (1) 求证： AB 是 $\odot O$ 的切线 .
- (2) 若 $AB = 4$ ， $AD = 2$ ，求 CD 的长 .

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $CD = 6$.

【解析】(1) 如图, 连接 OB ,

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle C$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C$$

$$\therefore \angle ABD = \angle OBC,$$

$\therefore CD$ 为直径,

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle OBD = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore OB \perp AB,$$

又 $\therefore OB$ 为半径,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) $\therefore \angle ABD = \angle C$, 且 $\angle A = \angle A$,

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB,$$

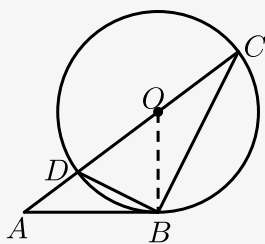
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\therefore AB^2 = AD \cdot AC$$

$$\text{即 } 4^2 = 2AC,$$

$$\therefore AC = 8$$

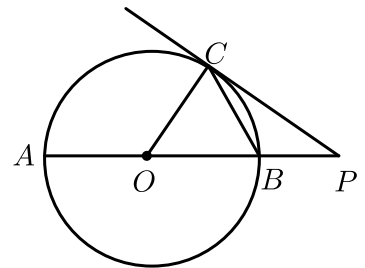
$$\therefore CD = AC - AD = 8 - 2 = 6.$$



【标注】【知识点】圆与相似

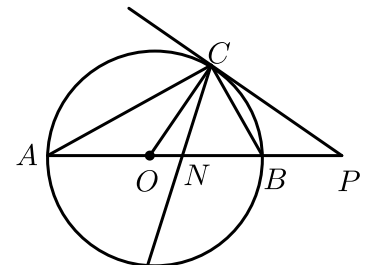
11. 已知, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 过点 C 的直线与 AB 的延长线交于点 P .

(1) 如图①, 若 $\angle COB = 2\angle PCB$, 求证: 直线 PC 是 $\odot O$ 的切线.



图①

(2) 如图②, 若点 M 是 $\widehat{AB}$ 的中点, CM 交 AB 于点 N , $MN \cdot MC = 36$, 求 BM 的值.

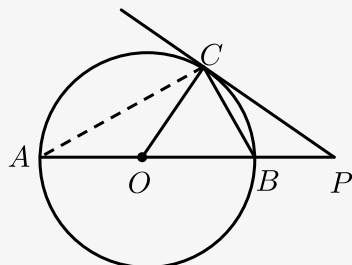


图②

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 6.

【解析】 (1) 连接 AC ,



图①

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACO,$$

$$\therefore \angle COB = 2\angle ACO.$$

$$\text{又} \because \angle COB = 2\angle PCB,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle PCB.$$

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle ACO + \angle OCB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle PCB + \angle OCB = 90^\circ, \text{ 即 } OC \perp CP.$$

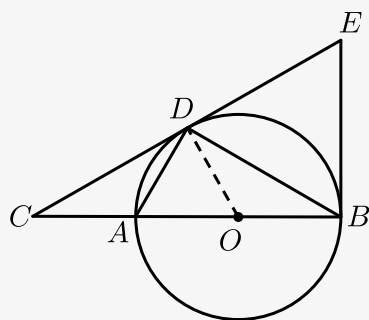
$$\because OC \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径},$$

$$\therefore PC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}.$$

(2) 连接 MA 、 MB , (如图)

$$(2) BE = \frac{5}{2}.$$

【解析】(1) 连接 OD .



$$\because OB = OD,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle BDO.$$

$$\because \angle CDA = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle ODB.$$

又 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ \text{ (直径所对的圆周角是直角)},$$

$$\therefore \angle ADO + \angle ODB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO + \angle CDA = 90^\circ, \text{ 即 } \angle CDO = 90^\circ.$$

$$\therefore OD \perp CD.$$

$\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线 (经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线).

$$(2) \because \angle C = \angle C, \angle CDA = \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle CDA \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

$$\because \frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}, BC = 6,$$

$$\therefore CD = 4.$$

$\because CE, BE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore BE = DE, BE \perp BC,$$

$$\therefore BE^2 + BC^2 = EC^2, \text{ 即 } BE^2 + 6^2 = (4 + BE)^2,$$

$$\text{解得 } BE = \frac{5}{2}.$$

【标注】【知识点】勾股定理的证明

【知识点】圆与勾股

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】切线的性质定理

【知识点】切线的判定定理

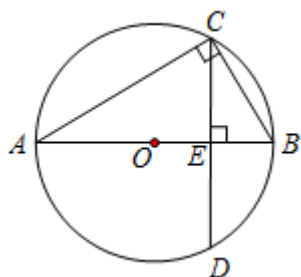
【知识点】正多边形与圆

【能力】推理论证能力

双垂直模型

直径引出的双垂直相似

AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 是 $\odot O$ 一条弦，且 $CD \perp AB$ 于点 E 。



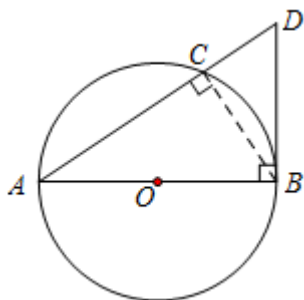
$$\triangle ACB \sim \triangle AEC \sim \triangle CEB,$$

$$AC^2 = AE \cdot AB, \quad BC^2 = BE \cdot AB,$$

$$CE^2 = AE \cdot BE.$$

切线与直径引出的双垂直相似

AB 是 $\odot O$ 的直径， BD 是 $\odot O$ 的切线，连接 AD 交 $\odot O$ 于点 C 。

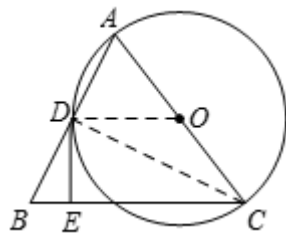


$$\triangle ABD \sim \triangle ACB \sim \triangle BCD,$$

$$AB^2 = AC \cdot AD, \quad BD^2 = DC \cdot DA,$$

$$BC^2 = AC \cdot CD.$$

在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ，以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D ， DE 是 $\odot O$ 的切线。

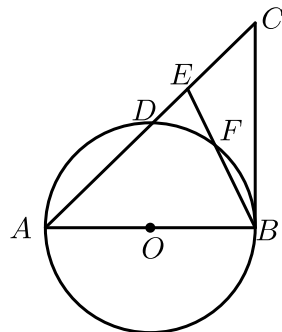


$$\triangle BDC \sim \triangle BED \sim \triangle DEC,$$

$$\triangle ADO \sim \triangle ABC.$$

例题

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， E 是 AC 边上的一点，且 $AE = AB$ ， $\angle BAC = 2\angle CBE$ ，以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于点 D ，交 BE 于点 F 。



- (1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线。
 (2) 若 $AB = 8$ ， $BC = 6$ ，求 DE 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $DE = 1.6$ 。

【解析】 (1) $\because AE = AB$,

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰三角形,

$$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC,$$

$\because \angle BAC = 2\angle CBE$,

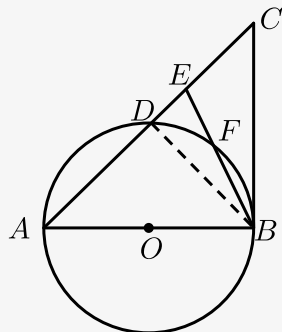
$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2}\angle BAC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC) + \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ,$$

即 $AB \perp BC$,

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 连接 BD ,



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABC,$$

$$\begin{aligned}
&\because \angle A = \angle A, \\
&\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB, \\
&\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \\
&\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AB = 8, BC = 6, \\
&\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10, \\
&\therefore \frac{AD}{8} = \frac{8}{10}, \\
&\text{解得: } AD = 6.4, \\
&\therefore AE = AB = 8, \\
&\therefore DE = AE - AD = 8 - 6.4 = 1.6.
\end{aligned}$$

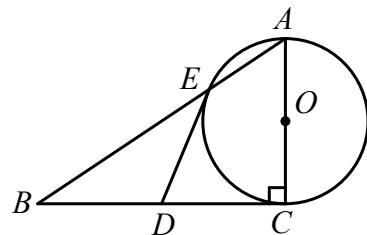
【标注】【知识点】圆与相似

【重点强调】

2016~2017学年天津河北区天津市第二中学初三上学期期末第23题

练习

14. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, D 为 BC 的中点, 以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 E .

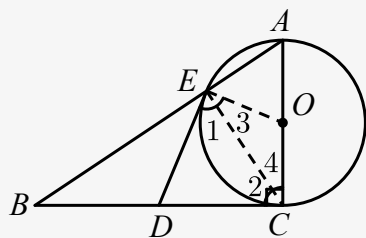


- (1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 若 $AE:EB = 1:2$, $BC = 6$, 求 AE 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $AE = \sqrt{6}$.

【解析】(1) 连接 OE 、 EC ,



$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AEC = \angle BEC = 90^\circ ,$$

$\because D$ 为 BC 的中点 ,

$$\therefore ED = DC = BD ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 ,$$

$$\therefore OE = OC ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 ,$$

$$\text{即} \angle OED = \angle ACB ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle OED = 90^\circ ,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) 由 (1) 知 : $\angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 与 $\text{Rt}\triangle BCA$ 中 , $\angle B = \angle B$, $\angle BEC = \angle BCA$,

$$\therefore \triangle BEC \sim \triangle BCA ,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BC}{BA} ,$$

$$\therefore BC^2 = BE \cdot BA ,$$

$\therefore AE : EB = 1 : 2$, 设 $AE = x$, 则 $BE = 2x$, $BA = 3x$,

$$\therefore BC = 6 ,$$

$$\therefore 6^2 = 2x \cdot 3x ,$$

$$\text{解得} : x = \sqrt{6} ,$$

$$\text{即} AE = \sqrt{6} .$$

【标注】【知识点】圆与相似

【重点强调】

2017~2018学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第23题10分

二、相似与二次函数综合

相似处理

此处根据题目条件灵活选择 :

①导边处理 : 以这两个相等角的两邻边分两种情形对应成比例列方程 ;

如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，若已确定 $\angle A = \angle D$ ，则要使

$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，需要分两种情形讨论：

$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ 或 $\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{DE}$ ，再依次列方程求解．

此法通用性更强，普适性更广，往往是首选．

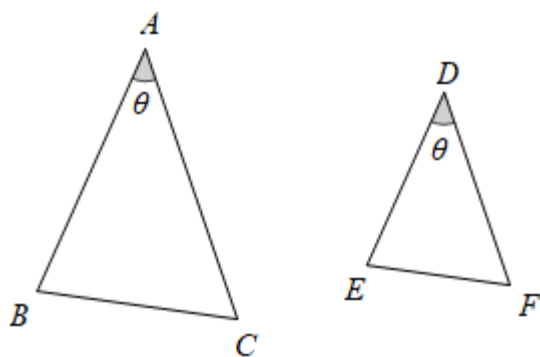
②导角处理：使另两个内角分两类对应相等；

如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，若已确定 $\angle A = \angle D$ ，则要使

$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，需要分两种情形讨论： $\angle B = \angle E$ ，

或 $\angle B = \angle F$ ，再导角分析处理．

此法最后常转化为角的存在性问题．



【教法备注】

①相似三角形存在性问题的关键在于先找到一组等角，有时明显，有时隐蔽．

比较明显的如存在公共角、对顶角、双直角等；比较隐蔽的如需要通过计算说理或通过构造等角．

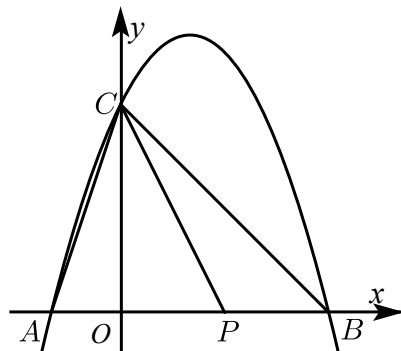
②若相似的三角形中有一个确定的三角形，可以先对其边、角作研究，定边求定长，定角求定比，然后再寻找目标三角形．

注：定边定长：确定的边，其长度确定，必可求；

定角定比：确定的角，其三角函数值确定，必可求．

|| 例题

15. 如图，抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，点 P 为线段 AB 上一点（不与点 A 、 B 重合），那么是否存在一点 P ，使得 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ABC$ 相似，若存在，请求出点 P 坐标；若不存在，请说明理由．



【答案】 存在点 P ，点 P 坐标为 $P(\frac{3}{2}, 0)$ ．

【解析】 当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

$\therefore C(0, 3)$ ，

当 $-x^2 + 2x + 3 = 0$ 时, 解得: $x_1 = -1, x_2 = 3, \therefore A(-1, 0), B(-3, 0)$,

$$\therefore AC = \sqrt{10}, AB = 4,$$

在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = \angle PAC$,

又 $\because \angle APC = \angle ABC + \angle PCB$, 故 $\angle APC \neq \angle ABC$,

若 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 则 $\angle APC = \angle ACB$, 即 $\triangle ACP \sim \triangle ABC$,

$$\text{则 } \frac{AC}{AB} = \frac{AP}{AC}, \text{ 即 } AC^2 = AB \cdot AP,$$

$$\therefore (\sqrt{10})^2 = 4AP,$$

$$\therefore AP = \frac{5}{2},$$

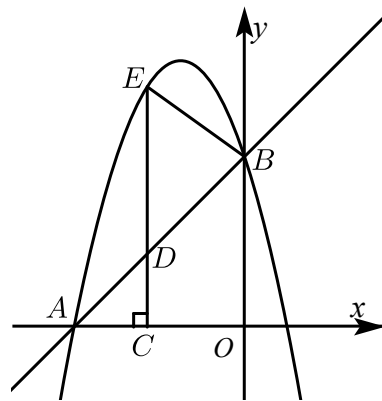
$$\therefore OP = AP - OA = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

故答案为: 存在点 P , 点 P 坐标为 $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

16. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = x + 4$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过 A 、 B 两点, 点 D 为线段 AB 上一动点, 过点 D 作 $CD \perp x$ 轴于点 C , 交抛物线于点 E .



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 求 $\triangle ABE$ 面积的最大值.
- (3) 连接 BE , 是否存在点 D , 使得 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似? 若存在, 求出点 D 坐标. 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $y = -x^2 - 3x + 4$.

(2) $\triangle ABE$ 面积的最大值为8.

(3) 点 D 的坐标为 $(-3, 1)$ 或 $(-2, 2)$.

【解析】 (1) 在直线解析式 $y = x + 4$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = 4$; 令 $y = 0$, 得 $x = -4$,

$$\therefore A(-4, 0), B(0, 4).$$

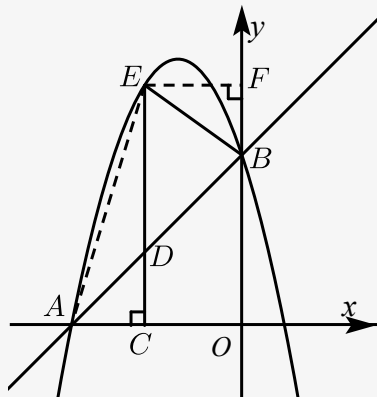
$\because$ 点 $A(-4, 0), B(0, 4)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上,

$$\therefore \begin{cases} -16 - 4b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

解得: $b = -3, c = 4$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -x^2 - 3x + 4$.

(2) 如图, 连接 AE 、过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F ,



设点 C 坐标为 $(m, 0) (m < 0)$, 则点 E 坐标为 $(m, -m^2 - 3m + 4)$,

则 $OC = -m, OF = -m^2 - 3m + 4$,

$\because OA = OB = 4$,

$\therefore BF = -m^2 - 3m$,

则 $S_{\triangle ABE} = S_{\text{梯形} AOFE} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle BEF}$

$$= \frac{1}{2} \times (-m + 4)(-m^2 - 3m + 4) - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times (-m) \times (-m^2 - 3m)$$

$$= -2m^2 - 8m$$

$$= -2(m + 2)^2 + 8,$$

$\because -4 < m < 0$,

$\therefore$ 当 $m = -2$ 时, S 取得最大值, 最大值为 8.

即 $\triangle ABE$ 面积的最大值为 8.

(3) 设点 C 坐标为 $(m, 0) (m < 0)$, 则 $OC = -m, CD = AC = 4 + m$,

$$BD = \sqrt{2}OC = -\sqrt{2}m,$$

则 $D(m, 4 + m)$.

$\because \triangle ACD$ 为等腰直角三角形, $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似

$\therefore \triangle DBE$ 必为等腰直角三角形.

i) 若 $\angle BED = 90^\circ$, 则 $BE = DE$,

$\because BE = OC = -m$,

$\therefore DE = BE = -m$,

$\therefore CE = 4 + m - m = 4$,

$$\therefore E(m, 4).$$

$\because$ 点 E 在抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 上,

$$\therefore 4 = -m^2 - 3m + 4, \text{ 解得 } m = 0 \text{ (不合题意, 舍去) 或 } m = -3,$$

$$\therefore D(-3, 1).$$

ii) 若 $\angle EBD = 90^\circ$, 则 $BE = BD = -\sqrt{2}m$,

在等腰直角三角形 EBD 中, $DE = \sqrt{2}BD = -2m$,

$$\therefore CE = 4 + m - 2m = 4 - m,$$

$$\therefore E(m, 4 - m).$$

$\because$ 点 E 在抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 上,

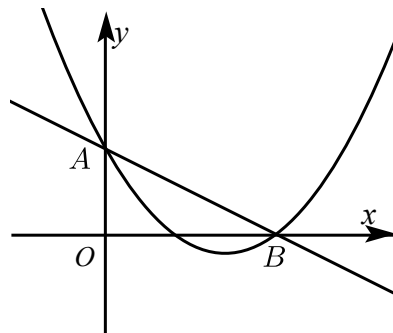
$$\therefore 4 - m = -m^2 - 3m + 4, \text{ 解得 } m = 0 \text{ (不合题意, 舍去) 或 } m = -2,$$

$$\therefore D(-2, 2).$$

综上所述, 存在点 D , 使得 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似, 点 D 的坐标为 $(-3, 1)$ 或 $(-2, 2)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

17. 如图, 已知抛物线 $y = \frac{5}{8}x^2 + bx + c$ 经过直线 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 与坐标轴的两个交点 A 、 B , 点 C 为抛物线上的一点, 且 $\angle ABC = 90^\circ$.



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 求点 C 坐标.
- (3) 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 上是否存在点 P , 使得 $\triangle BCP$ 与 $\triangle OAB$ 相似? 若存在, 请直接写出 P 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = \frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{4}x + 1$.

(2) $C(4, 4)$.

(3) P 的坐标为 $(0, 1)$ 或 $(4, -1)$ 或 $(-6, 4)$ 或 $(10, -4)$.

【解析】 (1) 把 $x = 0$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 得, $y = 1$,

$$\therefore A(0, 1),$$

把 $y = 0$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 得, $x = 2$,

$\therefore B(2, 0)$,

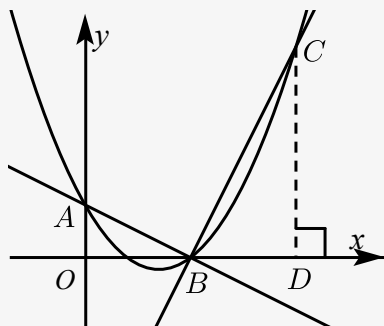
把 $A(0, 1)$, $B(2, 0)$ 代入 $y = \frac{5}{8}x^2 + bx + c$ 得, $\begin{cases} 1 = c \\ 0 = \frac{5}{2} + 2b + c \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b = -\frac{7}{4} \\ c = 1 \end{cases}$

,

$\therefore$ 抛物线的解析式 $y = \frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{4}x + 1$.

(2) 如图, 作 $CD \perp x$ 轴于 D ,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,



$\therefore \angle ABO + \angle CBD = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAB = \angle CBD$,

$\therefore \angle AOB = \angle BDC$,

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle BDC$,

$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{OB}{OA} = 2$,

$\therefore CD = 2BD$,

设 $BD = m$,

$\therefore C(2 + m, 2m)$,

代入 $y = \frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{4}x + 1$ 得, $2m = \frac{5}{8}(m + 2)^2 - \frac{7}{4}(m + 2) + 1$, 解得, $m = 2$

或 $m = 0$ (舍去),

$\therefore C(4, 4)$.

(3) $\therefore OA = 1$, $OB = 2$,

$\therefore AB = \sqrt{5}$,

$\therefore B(2, 0)$, $C(4, 4)$,

$\therefore BC = 2\sqrt{5}$,

① 当 $\triangle AOB \sim \triangle PBC$ 时, 则 $\frac{PB}{OA} = \frac{BC}{OB}$,

$\therefore \frac{PB}{1} = \frac{2\sqrt{5}}{2}$, 解得, $PB = \sqrt{5}$,

作 $PE \perp x$ 轴于 E , 则 $\triangle AOB \sim \triangle PEB$,

$\therefore \frac{PE}{OA} = \frac{PB}{AB}$, 即 $\frac{PE}{1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$,

$$\therefore PE = 1,$$

$\therefore P$ 的纵坐标为 ± 1 , 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 得, $x = 0$ 或 $x = 4$,

$\therefore P(0, 1)$ 或 $(4, -1)$;

②当 $\triangle AOB \sim \triangle CBP$ 时, 则 $\frac{PB}{OB} = \frac{BC}{OA}$,

$$\text{即 } \frac{PB}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{1}, \text{ 解得, } PB = 4\sqrt{5},$$

作 $PE \perp x$ 轴于 E , 则 $\triangle AOB \sim \triangle PEB$,

$$\therefore \frac{PE}{OA} = \frac{PB}{AB}, \text{ 即 } \frac{PE}{1} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore PE = 4,$$

$\therefore P$ 的纵坐标为 ± 4 , 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 得, $x = -6$ 或 $x = 10$,

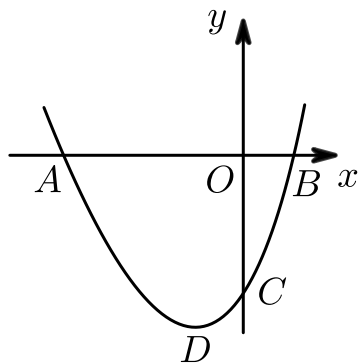
$\therefore P(-6, 4)$ 或 $(10, -4)$;

综上, P 的坐标为 $(0, 1)$ 或 $(4, -1)$ 或 $(-6, 4)$ 或 $(10, -4)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

练习

18. 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2$ 平移后经过 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$, 设平移后的抛物线与 y 轴交于点 C , 其顶点为 D .



- (1) 求平移后的抛物线解析式和点 D 的坐标.
- (2) 求证: $\angle CAD = \angle OCB$.
- (3) 在 x 轴上是否存在点 E , 使得 $\triangle ACE$ 与 $\triangle OCD$ 相似? 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$, 坐标是 $(-1, -4)$.

(2) 证明见解析.

(3) 存在; $E_1(-5, 0)$, $E_2(-12, 0)$.

【解析】(1) 设平移后的解析式为 $y = x^2 + bx + c$ ，将 B 、 C 点坐标代入，得

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$.

平移后的抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$,

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4 ,$$

顶点 D 的坐标是 $(-1, -4)$.

(2) 当 $x = 0$ 时, $y = -3$, 即 $C(0, -3)$.

由勾股定理, 得

$$AD = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (-4 - 0)^2} = 2\sqrt{5} ,$$

$$DC = \sqrt{(0 + 1)^2 + (-3 + 4)^2} = \sqrt{2} ,$$

$$AC = \sqrt{(0 + 3)^2 + (-3 - 0)^2} = 3\sqrt{2} ,$$

$$BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} ,$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{2} ,$$

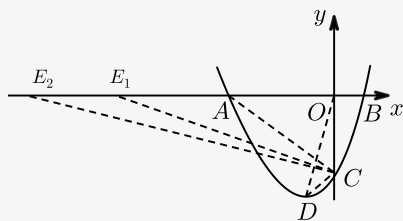
$$\frac{CD}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{1} , \frac{AC}{OC} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{CD}{OB} = \frac{AC}{OC} = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle COB ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle OCB .$$

(3) 如图:



设 $E(b, 0)$, $\angle EAC = \angle OCD = 135^\circ$,

$$DC = \sqrt{(0 + 1)^2 + (-3 + 4)^2} = \sqrt{2} , AC = \sqrt{(0 + 3)^2 + (-3 - 0)^2} = 3\sqrt{2} ,$$

$$OC = 3 , AE = -3 - b ,$$

$$\text{当 } \triangle AEC \sim \triangle CDO \text{ 时, } \frac{AE}{CD} = \frac{AC}{OC} , \text{ 即 } \frac{-3 - b}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{3} ,$$

解得 $b = -5$, 即 $E_1(-5, 0)$;

$$\text{当 } \triangle AEC \sim \triangle COD \text{ 时, } \frac{AE}{CO} = \frac{AC}{CD} , \text{ 即 } \frac{-3 - b}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} ,$$

解得 $b = -12$,

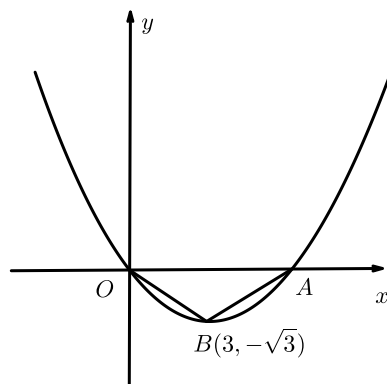
即 $E_2(-12, 0)$.

综上所述：在 x 轴上存在点 E ，使得 $\triangle ACE$ 与 $\triangle OCD$ 相似，点 E 的坐标为

$E_1(-5, 0)$ ， $E_2(-12, 0)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

19. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过原点 O ，交 x 轴于点 A ，其顶点 B 的坐标为 $(3, -\sqrt{3})$



(1) 求该抛物线的函数关系式及点 A 的坐标。

(2) 在抛物线上是否存在点 Q ，使 $\triangle QAO$ 与 $\triangle OAB$ 相似？如果存在，求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ ； $A(6, 0)$ 。

(2) $Q_1(3, -\sqrt{3})$ ， $Q_2(9, 3\sqrt{3})$ ， $Q_3(3, -3\sqrt{3})$ 。

【解析】 (1) 抛物线的顶点为 $B(3, -\sqrt{3})$ ，

$$\therefore \text{设 } y = a(x - 3)^2 - \sqrt{3}$$

抛物线经过原点 $(0, 0)$ ，

$$\therefore 0 = a(0 - 3)^2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

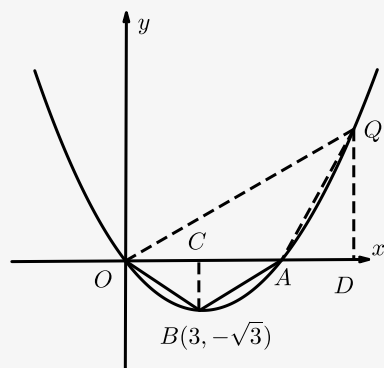
$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x - 3)^2 - \sqrt{3}, \text{ 即 } y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\text{令 } y = 0 \text{ 得: } \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = 6,$$

$$\therefore A \text{ 的坐标为 } (6, 0).$$

(2) 过 B 作 $BC \perp x$ 轴于 C ，



在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, $\tan \angle OBC = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore \angle OBC = 60^\circ$, 而 $OB = AB$, 故 $\angle OBA = 120^\circ$

分两种情况:

① 当点 Q 在 x 轴下方时, $\triangle QAO$ 就是 $\triangle BAO$,

此时 Q 点坐标 $Q(3, -\sqrt{3})$

② 当点 Q 在 x 轴上方时, 由 $\triangle ABO \sim \triangle QAO$,

有 $AQ = OA = 6$, $\angle OAQ = 120^\circ$,

作 $QD \perp x$ 轴, 垂足为 D , 则 $\angle QAD = 60^\circ$,

$\therefore QD = 3\sqrt{3}$, $AD = 3$, $\therefore OD = 9$.

此时 Q 点坐标是 $(9, 3\sqrt{3})$

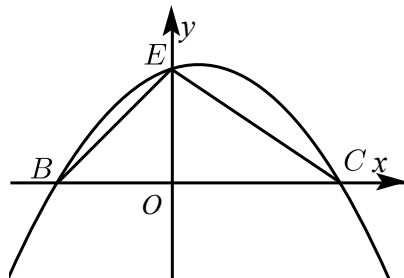
而 $(9, 3\sqrt{3})$ 满足关系 $y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x-3)^2 - \sqrt{3}$, 即 Q 在抛物线上

根据对称性可知点 $(-3, 3\sqrt{3})$ 也满足条件

$\therefore Q$ 点坐标为 $Q_1(3, -\sqrt{3})$, $Q_2(9, 3\sqrt{3})$, $Q_3(-3, 3\sqrt{3})$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

20. 如图, 已知抛物线的方程 $C_1: y = -\frac{1}{m}(x+2)(x-m)$ ($m > 0$) 与 x 轴相交于点 B 、 C , 与 y 轴相交于点 E , 且点 B 在点 C 的左侧. 在第四象限内, 抛物线 C_1 上是否存在点 F , 使得以点 B 、 C 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle BCE$ 相似? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 存在. $m = 2 + 2\sqrt{2}$. 理由见解析.

【解析】 $B(-2, 0)$, $C(m, 0)$, $E(0, 2)$, $\therefore \angle EBC = 45^\circ$,

①若 $\triangle BEC \sim \triangle BCF$, $\therefore \angle CBF = 45^\circ$,

$$BF: \begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -\frac{1}{m}(x+1)(x-m) \end{cases}'$$

$$\therefore x_F = 2m, \therefore F(2m, -2m-2),$$

$$BF = (2m+2)\sqrt{2}, \frac{BE}{BC} = \frac{BC}{BF},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{m+2} = \frac{m+2}{(2m+2)\sqrt{2}},$$

$$m_1 = 2 + 2\sqrt{2}, m_2 = 2 - 2\sqrt{2} \text{ (舍)};$$

②若 $\triangle FCB \sim \triangle BEC$, $\therefore \angle CBF = \angle BCE$, $CE \parallel BF$, $k_{CE} = k_{BF} = -\frac{2}{m}$,

$$BF: \begin{cases} y = -\frac{2}{m}(x+2) \\ y = -\frac{1}{m}(x+2)(x-m) \end{cases} \Rightarrow x_F = m+2,$$

$$\therefore F\left(m+2, -2 - \frac{8}{m}\right), \frac{CE}{CB} = \frac{CB}{BF} \Rightarrow CB^2 = CE \cdot BF,$$

$$(m+2)^2 = \sqrt{m^2+4} \cdot \sqrt{\frac{(m^2+4)(m+4)^2}{m^2}},$$

$$\text{解得: } m^3 + 4m^2 + 4m = m^3 + 4m^2 + 4m + 1, \text{ 无解.}$$

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合